completatete e messe nella maggior luce dalle belle ricerche del signor BERTRAND *) e da alcune ingegnose osservazioni dell'illustre STURM **).

Si potrebbe, per verità, anche in questo secondo caso, riguardare *X,* F, *Z* come funzioni di x, jy, £, salvo il tener conto dell'equazione della superficie iniziale ; ma questo metodo è poco vantaggioso nella ricerca della condizione d'esistenza di una superficie ortogonale ***).

Fra le due classi di problemi che abbiamo or ora accennato esiste un caso di transizione; ed è quello in cui i coseni *X, Y, Z* sono tali funzioni di x_y y_y ^ che il sistema determinato da esse, apparentemente complesso, si riduce in realtà ad un sistema semplice. Nei seguenti articoli vogliamo esaminare questo caso singolare.

XI.

Affinchè questo caso si verifichi, bisogna evidentemente che il luogo dei punti di partenza di tutte le rette che passano per il punto qualunque (£, -/), £), luogo rappresentato dalle equazioni (25), e passante per il punto (£, V), C), si riduca ad una retta. Ora indicando con *i* la distanza da questo punto al punto (#, *y,* ^), da cui parte una

*) Journal de Mathematiques pures et appliquèes, t. IX (1844), pag. 133.

**) Comptes rendus de l'Academie des Sciences, t. XX (1845), pag. 1239 e seguenti, nella parte analitica del *Mcmoìre sur la vision.*

***) Nell'efiettuare questa ricerca il signor DIHU (Nouvelles Annales de Mathómatiques, t. XI (1852), pag. 70] e caduto in un equivoco che fu avvertito dal signor A. TRANSON [Nouvelles Annales de Mathematlques (2^{mc} sèrie), t. II (1863), pag. 138]. A noi sembra però che una parte del disaccordo fra i due autori si spieghi colla differente interpretazione ch'essi danno all'enunciato del problema, enunciato il quale non è infatti scevro da ambiguità.

Nel secondo dei citati articoli (pag. 140) il signor TRANSON fa uso di una certa proprietà del fattore d'integrazione d'un differenziale a tre variabili. Questa proprietà non e che un caso particolare d'un'altra assai generale e pressoché intuitiva, la quale consiste in ciò che «un'equazione alle derivate parziali lineare ed omogenea, cioè della forma :

non può avere più di *n* — i soluzioni indipendenti ». Ciò deducesi immediatamente dallo stesso metodo d'integrazione di LAGRANGE, ma risulta anche da ciò che il Jacobiano di *n* soluzioni distinte è nullo in virtù dell'equazione proposta, per cui queste *n* soluzioni non possono essere indipendenti. Nel caso considerato dal signor TRANSON le funzioni [/. ed *F* soddisfanno ad un'equazione della forma indicata, alia quale soddisfa pure l'integrale *U* per la proporzionalità di A^r, 7, *Z* a ^-— , - — , - — : dunque una di queste tre funzioni deve esser funzione delle altre due.